

Αλγεβρικές Δομές I (2018-2019)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #7

1. Βρείτε όλες τις υποομάδες των παρακάτω ομάδων και σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της.

$$(1) \mathbb{Z}_3, \quad (2) \mathbb{Z}_9, \quad (3) \mathbb{Z}_{27}, \quad (4) \mathbb{Z}_{15}, \quad (5) \mathbb{Z}_{45}, \quad (6) \mathbb{Z}_{30}, \quad (7) \mathbb{Z}_{36}.$$

2. Θεωρούμε τα ακόλουθα στοιχεία της S_6 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) Να προσδιορισθούν οι τροχιές της χ στις οποίες διαμερίζεται το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, όταν $\chi = \sigma, \tau$ και μ .

(2) Να προσδιορισθεί η ανάλυση σε ξένους κύκλους των $\tau, \mu, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \sigma^6$.

(3) Να προσδιορισθούν οι τάξεις $\text{ord}(\sigma)$, $\text{ord}(\tau)$, και $\text{ord}(\mu)$.

(4) Να υπολογιστεί η μετάθεση σ^{2018} .

(5) Να υπολογιστούν τα στοιχεία:

$$\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}, \quad \sigma^{-1} \circ \tau \circ \sigma, \quad \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}, \quad \mu \circ \tau \circ \mu^{-1}.$$

(6) Να επιλυθεί ως προς $x \in S_6$ η εξίσωση: $x \circ \sigma \circ x^{-1} = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

(7) Ναδειχθεί ότι δεν υπάρχει $x \in S_6$ ώστε: $x \circ \sigma \circ x^{-1} = \tau$.

3. Ναδειχθεί ότι το πρόσημο μιας μετάθεσης σ της S_n είναι ίσο με το πρόσημο της αντίστροφης μετάθεσης σ^{-1} .

4. Έστω ότι $\sigma, \tau \in S_n, n \geq 2$. Ναδειχθεί ότι:

(1) Ισχύει $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \circ \tau^{-1} \in A_n$.

(2) Ισχύει $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \in A_n$ αν και μόνο αν $\tau \in A_n$.

5. Να δείξετε ότι κάθε στοιχείο $\sigma \in A_n, n \geq 3$, μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο 3-κύκλων.

6. Να δείξετε ότι αν $n \geq 4$ η εναλλάσσουσα ομάδα A_n δεν είναι αβελιανή.

7. Να δείξετε ότι η εναλλάσσουσα ομάδα A_4 έχει υποομάδες τάξεις 1, 2, 3, 4 και 12, αλλά δεν έχει υποομάδα τάξης 6.

8. Να βρεθεί το διάγραμμα Hasse της εναλλάσσουσας ομάδας A_4 .